

<b>Zentralabitur 2017</b>	<b>Mathematik</b>	<b>Schülermaterial</b>
<b>Wahlteil</b> <b>Rechnertyp: CAS</b>	<b>gA</b>	<b>ZBW/FWS/Nichtschüler</b>

## Hinweise zum Wahlteil

Im Wahlteil sind 68 Bewertungseinheiten (BE) von insgesamt 88 BE erreichbar.

Am Ende jeder Teilaufgabe sind die erreichbaren Bewertungseinheiten angegeben.

### Auswahl der Aufgaben

- Sie erhalten sechs Aufgaben in drei Blöcken.

Block 1 Analysis  (34 BE)	Block 2 Stochastik  (17 BE)	Block 3 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (17 BE)
Aufgabe 1A	Aufgabe 2A	Aufgabe 3A
Aufgabe 1B	Aufgabe 2B	Aufgabe 3B

- Wählen Sie eine Aufgabe aus Block 1 und zwei Aufgaben aus den Blöcken 2 und 3 aus.**

**Andere Kombinationen sind nicht zulässig.**

- Auswahlzeit: 30 Minuten
- Bearbeitungszeit: 175 Minuten

### Hilfsmittel für den Wahlteil

- Zeichenmittel
- eingeführter Taschenrechner vom Typ wie im Kopf der Aufgabe angegeben
- von der Schule eingeführte gedruckte Formelsammlung

Zentralabitur 2017	Mathematik	Schülermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 1 ZBW/FWS/Nichtschüler

## Aufgabe 1A

In einem Krankenhaus muss das Operationsbesteck sterilisiert werden. Es wird nach klassischer Definition als steril bezeichnet, wenn sich keine lebenden Erreger mehr darauf befinden. Die Sterilisation mit heißem Wasserdampf kann näherungsweise durch die Funktion  $N$  mit  $N(t) = N_0 \cdot e^{-k \cdot t}$  modelliert werden. Hierbei bezeichnet  $N(t)$  die Anzahl der noch lebenden Erreger,  $N_0$  die Anzahl der zu Beginn lebenden Erreger,  $t$  die Zeit in Minuten (min) nach Beginn des Sterilisationsprozesses und  $k$  eine positive Konstante in  $\frac{1}{\text{min}}$ .

- a) Auf einem Operationsbesteck befinden sich 1 000 000 lebende Erreger, die durch eine Dampfsterilisation mit  $k = 0,25$  abgetötet werden sollen. Bestimmen Sie die Anzahl der 30 Minuten nach dem Beginn der Dampfsterilisation noch lebenden Erreger.
- Berechnen Sie auf Minuten genau den frühesten Zeitpunkt, zu dem sich auf dem Operationsbesteck weniger als 100 lebende Erreger befinden.
- Beurteilen Sie die Eignung des Modells im Hinblick auf die klassische Definition von „steril“.
- Der Wert für die Konstante  $k$  soll nun verändert werden. Berechnen Sie den Wert von  $k$  so, dass auf dem Operationsbesteck nach 15 Minuten noch 25 % der Erreger leben. (12 BE)
- b) Untersuchen Sie, wie sich eine Verdoppelung von  $N_0$  auf die Änderungsrate von  $N$  auswirkt.
- Als Maß für die Widerstandsfähigkeit der Erreger wird der sogenannte D-Wert verwendet. Er gibt die Zeit an, wie lange ein Sterilisationsprozess auf die Erreger einwirken muss, um eine Reduzierung auf ein Zehntel ihrer aktuellen Anzahl zu erreichen.
- Zeigen Sie, dass für den D-Wert gilt:  $D = \frac{\ln(10)}{k}$ .
- Vergleichen Sie die Bedeutung von  $N(30)$  und  $\int_0^{30} N'(t) dt$  im Sachzusammenhang. (12 BE)
- c) Unabhängig vom Sachzusammenhang wird die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{10}{1 + 9 \cdot e^{-2 \cdot x}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , betrachtet. Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass der Graph von  $f$  punktsymmetrisch zu seinem Wendepunkt ist. Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen von  $f$  mit der Wendestelle  $x_w$ .
- Gegeben ist folgende Gleichung:  $\int_{x_w - a}^{x_w} f(x) dx + \int_{x_w}^{x_w + a} f(x) dx = 10 \cdot a$  für  $a > 0$ .
- Zeichnen Sie die zu den beiden Integralen zugehörigen Flächenstücke in die Abbildung der Anlage ein.
- Erläutern Sie davon ausgehend die Richtigkeit der obigen Gleichung. (10 BE)

Zentralabitur 2017	Mathematik	Schülermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 1 ZBW/FWS/Nichtschüler

## Fortsetzung Aufgabe 1A

### Material

Anlage

Graph zu Teilaufgabe c)

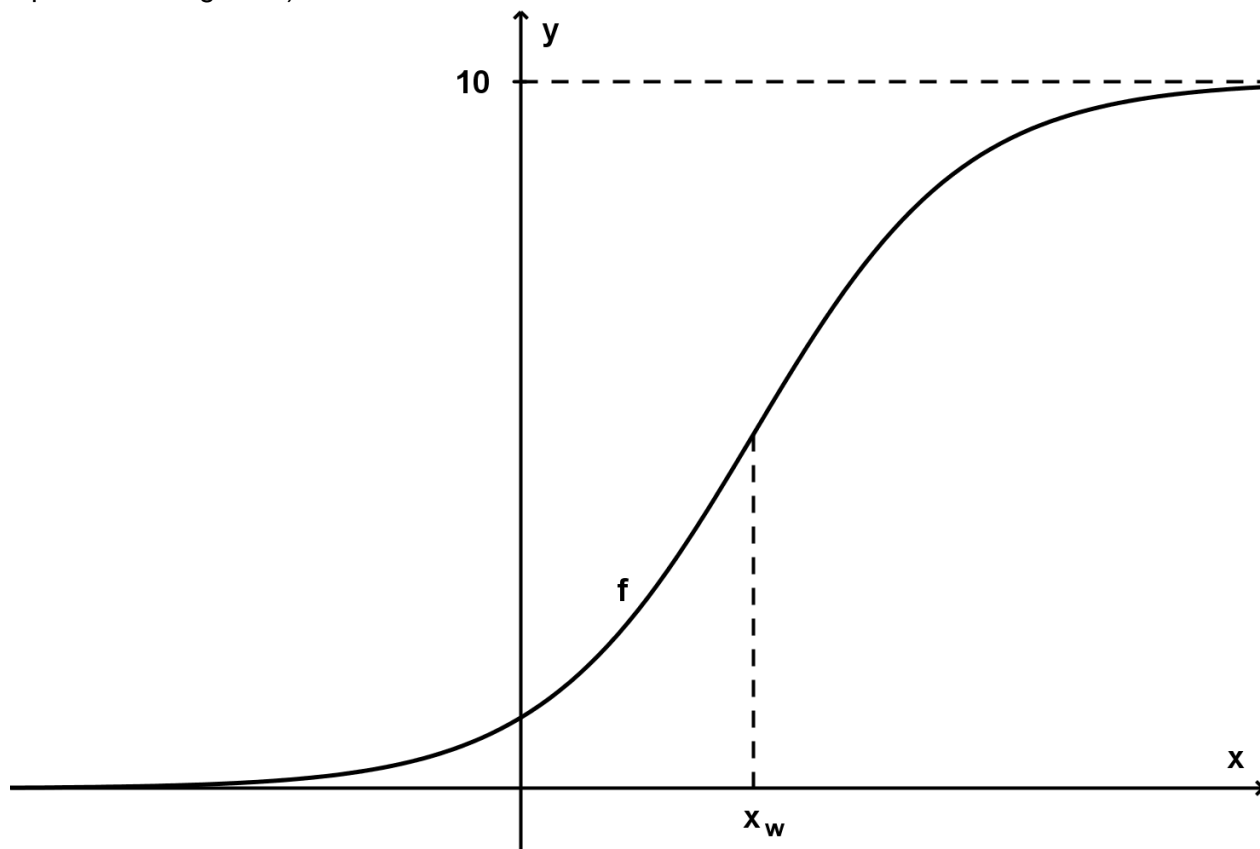
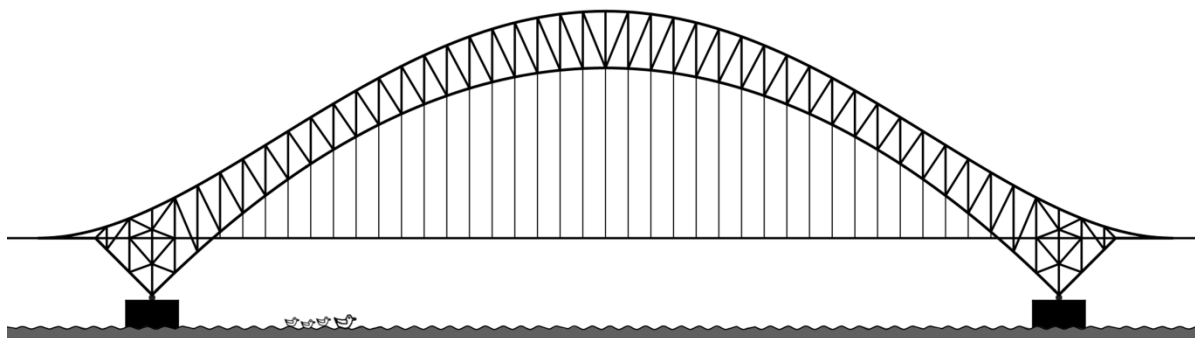


Abbildung: Graph von  $f$

Zentralabitur 2017	Mathematik	Schülermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 1 ZBW/FWS/Nichtschüler

## Aufgabe 1B



Die obenstehende Abbildung stellt den Entwurf für eine Brücke dar. Deren achsensymmetrisches Profil soll modellhaft in einem entsprechend gewählten Koordinatensystem beschrieben werden.

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{80} \cdot x^2 + 20$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , beschreibt für  $-40 \leq x \leq 40$  den unteren

Brückenbogen.

In den Punkten  $P(-40|0)$  und  $Q(40|0)$  endet der untere Brückenbogen jeweils in einem Stützlager.

Die Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{312500} \cdot x^4 - \frac{2}{125} \cdot x^2 + 25$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , beschreibt für  $-50 \leq x \leq 50$  den oberen

Brückenbogen.

Alle Koordinaten haben die Einheit Meter (m).

- a) Die Graphen der Funktionen  $f$  und  $g$  sind in der Anlage dargestellt.  
Zeichnen Sie in die Abbildung 1 der Anlage das für die Modellierung genutzte Koordinatensystem ein.

Der untere Brückenbogen ist maximal 20 m hoch.

Entscheiden Sie, ob das Verhältnis der maximalen Höhe des unteren Brückenbogens zu seiner Spannweite zwischen den Stützlager kleiner als  $\frac{1}{3}$  ist.

Weisen Sie nach, dass die Steigung des oberen Brückenbogens an seiner steilsten Stelle den Wert 65 % nicht überschreitet.

Zeigen Sie, dass die Modellierung des oberen Brückenbogens an der Stelle  $x = -50$  knickfrei an eine Waagerechte anschließen kann.

(14 BE)

- b) Im Rahmen einer Lichtshow soll das durch den oberen und den unteren Brückenbogen begrenzte Flächenstück zwischen den Stützlager in drei Farben beleuchtet werden. Hierzu soll es parallel zur  $y$ -Achse in drei Flächenstücke unterteilt werden. Für diese Unterteilung gibt es zwei Varianten:

- Variante 1: Die Flächenstücke haben den gleichen Inhalt.
- Variante 2: Die Flächenstücke sind gleich breit.

Untersuchen Sie, ob der Abstand der jeweils rechten Unterteilungsstellen für die beiden Varianten größer als ein Meter ist.

(9 BE)

Zentralabitur 2017	Mathematik	Schülermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 1 ZBW/FWS/Nichtschüler

## Fortsetzung Aufgabe 1B

c) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die Funktionenschar  $p_a$  gegeben mit

$$p_a(x) = a \cdot x^4 - 6 \cdot a \cdot x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Die zweite Ableitung von  $p_a$  ist gegeben durch  $p_a''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 - 12 \cdot a$ .

Untersuchen Sie, für welche Werte von  $a$  die zwei Wendepunkte von  $p_a$  oberhalb der  $x$ -Achse liegen.

Im Folgenden wird der zur  $y$ -Achse symmetrische Graph einer ganzrationalen Funktion  $q$  vom Grad 4 betrachtet.

Die Abbildung 2 der Anlage zeigt einen Ausschnitt aus dem Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion  $q'$ .

Begründen Sie mit diesen Angaben die Anzahl der Extrempunkte des zugehörigen vollständigen Graphen der Funktion  $q$ .

(11 BE)

## Material

Anlage

Graphen zu Teilaufgabe a)

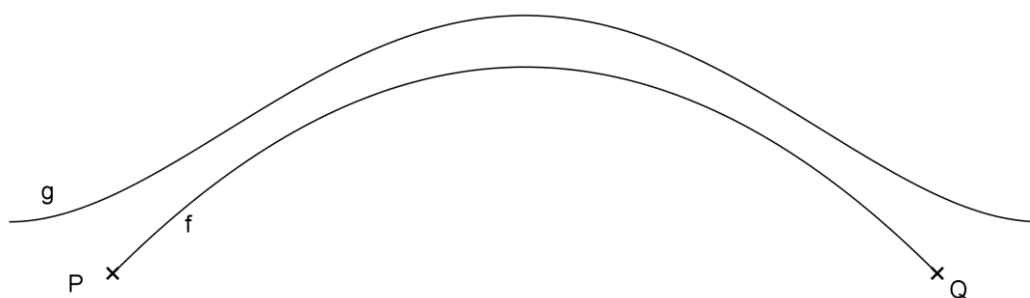


Abbildung 1: Graphen von f und g

Graph zu Teilaufgabe c)

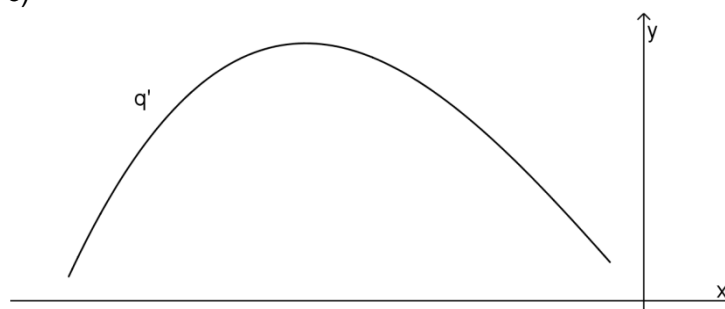


Abbildung 2: Ausschnitt aus dem Graphen von  $q'$

## Aufgabe 2A

Ein Hersteller bringt ein neues Smartphone auf den Markt. Die Geräte werden in vier Werken in jeweils großer Stückzahl hergestellt. Der Tabelle können für jedes Werk folgende Daten entnommen werden:

- der Anteil der in diesem Werk hergestellten Geräte an der Gesamtzahl aller hergestellten Geräte,
- der Anteil der fehlerhaften Geräte unter den in diesem Werk hergestellten Geräten.

Werk	A	B	C	D
Anteil an der Gesamtzahl	10 %	30 %	20 %	40 %
Anteil der fehlerhaften Geräte	5 %	3 %	4 %	2 %

- a) Von im Werk A hergestellten Geräten werden 250 zufällig ausgewählt. Die Anzahl der fehlerhaften Geräte wird als binomialverteilt angenommen.  
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter den ausgewählten Geräten genau 12 fehlerhafte befinden.  
Ermitteln Sie die Anzahl an fehlerhaften Geräten, die mit der größten Wahrscheinlichkeit auftritt. (5 BE)
- b) Geben Sie einen Wert von  $s$  an, für den mit dem Term  $200 \cdot 0,98^s \cdot 0,02 + 0,98^{200}$  im Sachzusammenhang die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses berechnet werden kann. Beschreiben Sie das zugehörige Ereignis.  
Ermitteln Sie, wie viele im Werk C hergestellte Geräte mindestens zufällig ausgewählt werden müssen, damit sich darunter mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens 500 Geräte befinden, die nicht fehlerhaft sind. (7 BE)
- c) Weisen Sie nach, dass der Anteil der fehlerhaften Geräte unter allen hergestellten Geräten 3 % beträgt.  
Ein unter allen hergestellten Geräten zufällig ausgewähltes Gerät ist fehlerhaft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es im Werk A hergestellt wurde. (5 BE)

<b>Zentralabitur 2017</b>	<b>Mathematik</b>	<b>Schülermaterial</b>
<b>Wahlteil</b> <b>Rechnertyp: CAS</b>	<b>gA</b>	<b>Block 2</b> <b>ZBW/FWS/Nichtschüler</b>

## Aufgabe 2B

Eine Fluggesellschaft setzt auf einer bestimmten Flugstrecke immer Flugzeuge des gleichen Typs mit 320 Sitzplätzen ein. Kunden der Fluggesellschaft, die einen Flug für diese Strecke gebucht haben, treten diesen erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % nicht an. Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt die Anzahl der Passagiere, die den Flug nicht antreten.

- a) Für ein Flugzeug dieses Typs sind für einen zufällig ausgewählten Flug auf dieser Strecke 320 Tickets verkauft worden. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in diesem Flugzeug
- genau 12 Plätze frei bleiben,
  - mindestens 10 aber höchstens 16 Plätze frei bleiben.
- (5 BE)
- b) Um Flugzeuge besser auszulasten, ist die Fluggesellschaft auf der betrachteten Strecke dazu übergegangen, für ihre Flüge mehr Tickets zu verkaufen als Plätze vorhanden sind. Passagiere, die nicht mit dem gebuchten Flugzeug transportiert werden können, werden von der Fluggesellschaft entschädigt. Betrachtet werden zufällig ausgewählte Flüge, für die jeweils 368 Tickets verkauft worden sind.
- Begründen Sie, dass der Term  $\binom{368}{30} \cdot 0,05^{30} \cdot 0,95^{338}$  die Wahrscheinlichkeit dafür beschreibt, dass genau 18 Personen von der Fluggesellschaft entschädigt werden müssen.
- Auf der betrachteten Strecke wollen 321 Personen den Flug antreten. Die Passagiere werden von der Fluggesellschaft angesprochen, ob sie den Flug freiwillig später antreten würden. Passagiere entscheiden sich unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % für einen späteren Flug. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Mitarbeiter genau 10 Passagiere ansprechen muss, um einen Passagier zu finden, der freiwillig später fliegt.
- (7 BE)
- c) Auf einer anderen Strecke fliegen Flugzeuge mit 240 Plätzen. Betrachtet werden zufällig ausgewählte Flüge, für die jeweils 264 Tickets verkauft worden sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei dieser Überbuchung mindestens eine Person nicht transportiert werden kann, beträgt 12,5 %. Bestimmen Sie einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit  $p$ , mit der Kunden, die einen Flug auf dieser Strecke gebucht haben, diesen auch tatsächlich antreten.
- (5 BE)

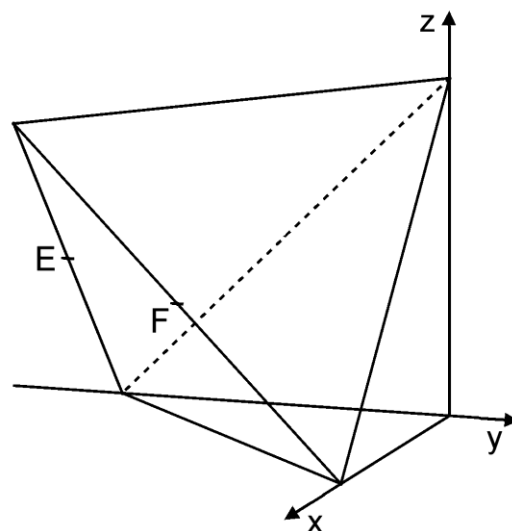
Zentralabitur 2017	Mathematik	Schülermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 3 ZBW/FWS/Nichtschüler

### Aufgabe 3A

Von einer Pyramide sind folgende Eckpunkte gegeben:

$A(0|-3|0)$ ,  $B(3|0|0)$ ,  $C(0|0|3)$  und  $D(3|-3|3)$ .

Alle Seitenkanten haben die gleiche Länge.



- a) Beschriften Sie alle Eckpunkte der Pyramide in der obigen Abbildung.

Die Punkte A, B und C liegen in einer Ebene T.

Zeigen Sie, dass der Vektor  $\vec{n}$  mit  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor der Ebene T ist.

Geben Sie eine Gleichung für die Ebene T in Koordinatenform an.

Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene T mit der xy-Ebene einschließt.

(9 BE)

- b) Vier Seitenkanten der Pyramide werden von der Ebene mit der Gleichung  $z = 1,5$  geschnitten. Die Punkte  $E(1,5|-3|1,5)$  und  $F(3|-1,5|1,5)$  sind zwei der sich ergebenden Schnittpunkte.

Zeichnen Sie die weiteren Schnittpunkte in die obige Abbildung ein.

Untersuchen Sie, ob die Schnittpunkte Eckpunkte eines Quadrates sind.

(8 BE)

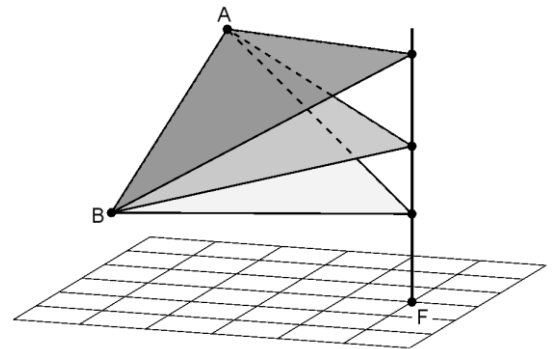


Zentralabitur 2017	Mathematik	Schülermaterial
Wahlteil Rechnertyp: CAS	gA	Block 3 ZBW/FWS/Nichtschüler

### Aufgabe 3B

Betrachtet werden Sonnensegel, die als Dreiecke modelliert werden. Sie sind mit zwei Eckpunkten in  $A(1|9|3)$  und  $B(2|1|2)$  sowie an einer Haltestange befestigt. Die Haltestange ist 4 Meter lang und steht im Punkt  $F(5|5,5|0)$  senkrecht zur  $xy$ -Ebene.

Alle Koordinaten werden in der Einheit Meter (m) angegeben. Die  $xy$ -Ebene stellt den Boden dar.



- a) Ein Sonnensegel wird im Punkt  $C(5|5,5|2)$  an der Haltestange befestigt.  
 Zeigen Sie, dass die Kanten  $CA$  und  $CB$  dieses Sonnensegels gleich lang sind und das Sonnensegel somit die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.  
 Bestimmen Sie den Winkel des Sonnensegels im Eckpunkt  $C$ .  
 Berechnen Sie die Größe der Fläche dieses Sonnensegels. (11 BE)
- b) An der Haltestange können unterschiedliche Sonnensegel in beliebiger Höhe befestigt werden.  
 Untersuchen Sie, ob es Befestigungspunkte  $D(5|5,5|z)$  an der Haltestange gibt, sodass das jeweils zugehörige Sonnensegel die Form eines rechtwinkligen Dreiecks hat. Der rechte Winkel soll dabei im Befestigungspunkt an der Haltestange liegen. (6 BE)